Section: Sciences Techniques ***Session de contrôle 2009***

Matière : Mathématiques

Exercice n°1 (3 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes, probabilité conditionnelle.
- ✓ **Aptitudes visées :** Ecrire un nombre complexe sous forme exponentielle, déterminer le module et le conjugué d'un nombre complexe, appliquer la formule de la probabilité totale.
- ✓ **Corrigé :**

1) c) 2) b) 3) c) 4) b)

Exercice n°2 (6 points)

- ✓ **Contenu :** Nombres Complexes.
- ✓ **Aptitudes visées :** Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, une équation du second degré ; connaitre la relation entre les racines d'une équation du second degré ; interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe.
- ✓ **Corrigé :**

1) a- $(3-i)^2 = 3^2 - 6i + i^2 = 9 - 6i - 1 = 8 - 6i$.

b- $(E) : z^2 + (1+i)z - 2(1-i) = 0$; $\Delta = (1+i)^2 + 4(-2(1-i)) = 8 - 6i = (3-i)^2$.

$z_1 = -2$; $z_2 = 1 - i$.

2) $\theta \in [0,\pi]$, $(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta})z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$.

a- On a : $(-2)^2 + (1 + e^{i\theta})(-2) - 2(1 - e^{i\theta}) = 4 - 2 - 2e^{i\theta} - 2 + 2e^{i\theta} = 0$

b- $(-2)z_2 = -2(1 - e^{i\theta})$ signifie $z_2 = 1 - e^{i\theta}$

3) A(-2) et $M_\theta (1 - e^{i\theta})$

a- $AM_\theta = |1 - e^{i\theta} + 2| = |3 - e^{i\theta}| = |3 - \cos\theta - i\sin\theta| = \sqrt{10 - 6\cos\theta}$.

b- AM_θ est maximale si $\cos\theta = -1$ soit $\theta = \pi$.

Exercice n°3 (5 points)

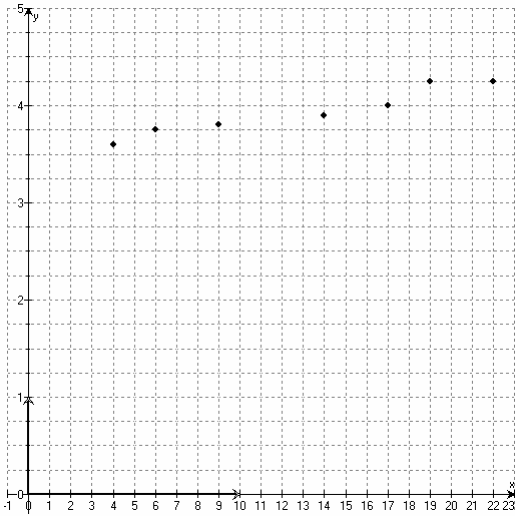
- ✓ **Contenu :** Série statistique double.
- ✓ **Aptitudes visées :** Représenter un nuage de points, justifier un ajustement affine, calculer et interpréter le coefficient de corrélation, déterminer une équation de la droite de régression et l'interpréter pour donner une estimation.

www.bac.org.tn

✓ **Corrigé :**

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kilogrammes)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a-



Nuages des points associés

à la série (X,Y)

b- D'après le nuage des points, un ajustement affine de la série double est bien justifié .

2) a- $\overline{x} = 13$; $\sigma_x = 6,324$.

b- $\overline{y} = 3,971$; $\sigma_y = 0,287$.

3) a- Le coefficient de corrélation entre X et Y est : $r = 0,946$.

b- Il ya une très forte corrélation entre x et y.

4) a- $Cov(X , Y) = 1,721$

b- L'équation de la droite de régression de Y en X est de la forme : $y = a x + b$

avec $a = \frac{Cov(X,Y)}{V(X)} = \frac{1,721}{40} = 0,04$; $b = \overline{y} - a\overline{x} = 3,41$

D'où une équation de la droite de régression de Y en X est : $y = 0,04x + 3,41$

5) a- $x = 30$ alors $y = (0,04)(30) + 3,41 = 4,61$.

Une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance est 4,61 kg.

b- pour $y = 3,85$ kg on obtient $3,85 = 0,04x + 3,41$ d'où $x = 11$

Ainsi l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 kg est égal à 11 jours.

www.bac.org.tn

Exercice 4 *(6 points)*

- ✓ **Contenu :** Fonctions numériques d'une variable réelle, suites réelles.
- ✓ **Aptitudes visées :** Etudier les variations d'une fonction, déterminer les asymptotes à sa courbe, étudier la position relative de deux courbes, appliquer l'inégalité des accroissements finis, étudier la convergence d'une suite réelle définie par une fonction.

✓ **Corrigé :**

Pour tout $x \in IR$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln (1 + e^{-x})$.

1) a- $u : x \to 1 + e^{-x}$ est dérivable et strictement positive sur IR, alors la fonction $x \to \ln(1 + e^{-x})$ est dérivable sur IR, par suite f est dérivable sur IR et on a :

Pour tout $x \in IR$; $f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^{x}}$.

b- tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
f '(x)	-	
f(x)	$+\infty$ ↘	0

c- Pour tout $x \in IR$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(e^{-x}(e^{x} + 1)) = \frac{1}{2}(\ln(e^{-x}) + \ln(e^{x} + 1)) = \frac{1}{2}(-x + \ln(e^{x} + 1))$

d'où $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{x})$

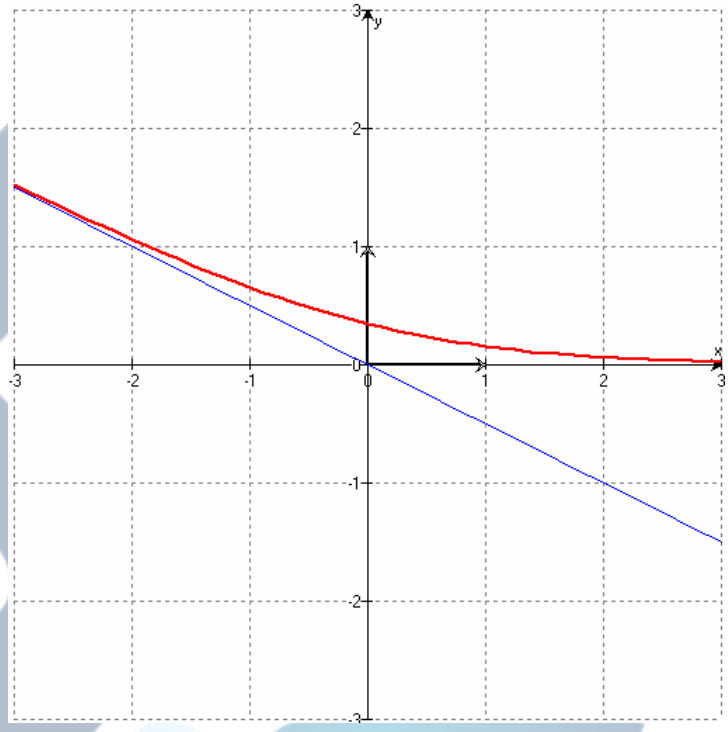
d- • $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + \frac{1}{2} x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (\ln(1 + e^{x})) = 0$ donc la droite Δ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.

• $f(x) - (-\frac{1}{2} x) = \ln (1 + e^{x})$ et comme $1 + e^{x} > 1$ pour tout $x \in$ ℝ

alors $\ln (1 + e^{x}) > 0$ et par suite $\mathscr{C}_f$ est au dessus de Δ.

www.bac.org.tn

e- Traçage de $\mathscr{C}_f$ et Δ .



2) a- On pose $h(x) = f(x) - x$. h est dérivable sur IR, $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout $x \in IR$.

h est une fonction continue strictement décroissante sur IR alors h réalise une bijection de IR sur h(IR)=IR.

Alors il existe un réel α unique tel que $h(\alpha) = 0$. Or $h(\alpha) = 0$ signifie $f(\alpha) = \alpha$.

b- $h(0) = \frac{1}{2}\ln 2 > 0$ et $h(1) = -0{,}84 < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $0 < \alpha < 1$.

3) a- Pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x}$.

Pour tout $x \geq 0$, $1 + e^x \geq 2$ signifie $\frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$ signifie $\frac{1}{2} \times \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{4}$ donc $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b- f est dérivable sur IR_+ et pour tout $x \in IR_+$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

Alors d'après les inégalités des accroissements finis : $|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$; $x \in IR_+$

Conclusion : pour tout $x \geq 0$, $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|x - \alpha|$.

4) a- Pour n = 0, $u_0 = 0 \geq 0$; vérifié.

Soit $n \in IN$, supposons que $u_n \geq 0$ et montrons que $u_{n+1} \geq 0$.

On a $u_{n+1} = f(u_n) \geq 0$ d'après 1)b-

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $u_n \geq 0$.

www.bac.org.tn

b- D'après 3)b et pour $x = u_n \in IR_+$ pour tout $n \in IN$ on obtient :

$|f(u_n) - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ signifie $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$.

c- Pour $n = 0$; $|u_0 - \alpha| = |\alpha| = \alpha \leq 1 = \left(\frac{1}{4}\right)^0$, vraie .

Soit $n \in IN$, supposons que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et montrons que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

D'après b) on a pour tout $n \in IN$, $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$ et comme $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$

Conclusion : Pour tout $n \in IN$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

d- $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{4} < 1$ et $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

www.bac.org.tn